A PROPOS DES PROBLEMES RENCONTRES LORS DE L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX EN CLASSE DE COURS MOYEN.

Claude COMITI et Robert NEYRET.

Nous nous proposons dans cet article de prendre comme point de départ l'observation des erreurs les plus fréquemment commises par les élèves de Cours moyen dans l'usage des décimaux.

Pour mieux comprendre ces erreurs, nous les replacerons dans le contexte des présentations usuelles des décimaux.

Enfin, après avoir rappelé l'intérêt de ces nombres, nous essaierons de mettre en évidence quelques points fondamentaux qu'il nous semble indispensable d'avoir en tête lorsque l'on est confronté au problème de l'introduction des décimaux en classe de C.M.

I – QUELQUES TYPES D'ERREURS RELEVEES DANS L'USAGE DES DECIMAUX.

Les exemples cités dans ce paragraphe reprennent une partie des résultats d'un test passé dans le département de l'Ain par 626 enfants répartis dans 39 classes (*).

- A la consigne : *"Sur chaque ligne, entoure le plus petit des trois nombres".*

Le pourcentage des réponses exactes est le suivant :

3,7	7,1	5,1	96 %
5,21	5,15	5,12	97 %
7,3	7,28	7,401	44 %
6,04	6,4	6,44	71 %

Les élèves ne semblent pas avoir de difficulté lorsque la partie entière est différente ou encore lorsque les nombres ont même partie entière et une partie décimale de même longueur. Mais si ces derniers ont même partie entière et des parties décimales de longueur différente, le décimal le plus petit est, pour 50 % des élèves dans le cas de la 3e ligne et pour 30 % dans celui de la 4e, le nombre qui a le moins de décimales, comme le montre une analyse plus fine des résultats de l'enquête.

(*) Voir référence 4 dans la bibliographie.

• A la consigne : *"Voici une liste de décimaux : 4,5 ; 3 ; 2,7 ; 4,2 ; 3,9 ; 2,12 ; 3,09 . Ecris ces nombres du plus petit au plus grand dans les cases suivantes.*

37 % des élèves seulement fournissent une réponse juste.

Les 63 % autres réponses se répartissent comme suit :

– 23 % (ne rangeant pas 3,9) :	2,7	2,12	3	3,09	4,2	4,25	
– 12,5 % :	2,7	2,12	3	3,9	3,09	4,2	4,25
– 2 % :	3	2,7	2,12	3,9	3,09	4,2	4,25

Si l'on exclut les élèves qui ont placé 3 en tête, sans doute parce que n'ayant pas de partie décimale, il est considéré comme le plus petit, on constate que les élèves classent d'abord la partie entière et font ensuite les mêmes erreurs que précédemment (rangement suivant la longueur de la partie décimale).

– Enfin 4 % proposent :	3	2,7	3,9	4,2	2,12	3,09	4,25

appliquant aux décimaux les règles permettant de ranger les naturels !

• A la consigne : *"Place 3,245 dans ce tableau".*

2,9		*3*		*3,1*		*3,2*		*3,3*		*3,4*	

71 % des enfants répondent correctement. Le score descend à 52 % lorsqu'il s'agit de placer 0,027 dans le tableau suivant

	0,001		0,01		0,1		1	

Dans les deux cas, les erreurs sont multiples. On note cependant dans le 2e cas 22 % d'enfants qui situent 0,027 entre 0,001 et 0,01 sans doute en tenant compte de la longueur de sa partie décimale.

• A la consigne : *"Dans les tableaux suivants, les nombres sont rangés du plus petit au plus grand. Ecris chaque fois un nombre dans la case vide".*

3,25		4	80 % des enfants répondent correctement.
5,2		5,3	42 % seulement le font.

Pour de nombreux élèves 5,2 et 5,3 sont deux décimaux consécutifs. Ils ne conçoivent donc pas que l'on puisse en intercaler un autre.

Remarque : Nous aurions pu donner de la même façon des exemples d'erreur portant sur les opérations sur les décimaux. Tous les maîtres en ont sans doute de nombreux en mémoire. Il nous a semblé que cela risquait de trop alourdir cet article. C'est pourquoi nous nous sommes volontairement bornés aux erreurs portant sur la conjugaison de deux ou plusieurs décimaux ainsi que sur l'intercalation d'un ou plusieurs décimaux entre deux décimaux donnés.

II – A PROPOS DE QUELQUES PRESENTATIONS USUELLES DES DECIMAUX.

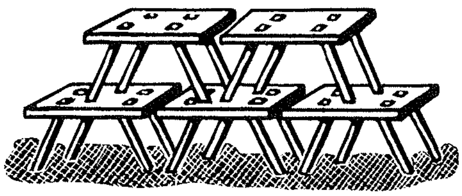
Essayons de comprendre comment les erreurs mises en évidence dans le paragraphe précédent peuvent se rencontrer si fréquemment en étudiant différentes présentations de décimaux.

2-1 – Présentation dite traditionnelle.

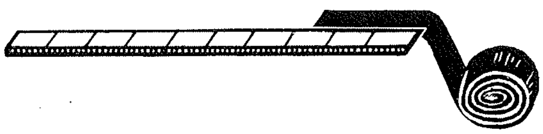
Un exemple en est donné par LE CALCUL QUOTIDIEN (Picard et Renucci). cours moyen et fin d'études, Ed. 1967 – Collection Bodard.

NOMBRES DÉCIMAUX

Nombres à virgule



5 bancs : le nombre de bancs sera toujours un nombre entier.



La longueur du ruban ne peut pas toujours être exprimée par un nombre entier. Le ruban mesure :
1 m et 275 mm ou ⟶ 1,275 m

***1,275 m* est un nombre décimal**

Le nombre décimal comprend deux parties séparées par une virgule :
à gauche : une partie entière (1 mètre)
à droite : une partie décimale (275 millimètres)

Comparons

1,275 m	→ 1 m	**1,275**	→ 1 unité non précisée
	→ 2 dm ou 2 dixièmes de mètre		→ 2 **dixièmes**
	→ 7 cm ou 7 centièmes de mètre		→ 7 **centièmes**
	→ 5 mm ou 5 millièmes de mètre		→ 5 **millièmes**

1 mètre = 10 décimètres = 100 centimètres = 1 000 millimètres
1 unité = 10 dixièmes = 100 centièmes = 1 000 millièmes

Le décimal est ici introduit comme un codage de mesure de grandeur qui permet de passer de l'expression d'une mesure avec deux unités (le mètre et le millimètre) à une expression ne faisant intervenir que le mètre.

Cette méthode a de nombreux inconvénients :

– le décimal sera par la suite difficilement détachable de l'unité de longueur qui a permis de l'introduire !

– le décimal apparaît comme un recollement de deux entiers 1 et 275 (le texte dit : "le nombre décimal comprend deux parties séparées par une virgule,
à gauche : une partie entière (1 mètre)
à droite : une partie décimale (275 millimètres)")

Comment s'étonner dans ces conditions que des enfants écrivent $1{,}38 < 1{,}275$ en comparant 38 et 275.

– les décimaux sont implicitement limités au rang des plus petites unités couramment utilisées (3 chiffres après la virgule pour les longueurs, 2 chiffres après la virgule pour les francs !).

Comment alors ne pas comprendre l'enfant qui ne saura pas intercaler un décimal entre 12,25 et 12,26 . Comment pourrait-il concevoir que l'on peut intercaler autant de décimaux que l'on veut entre ces deux nombres puisque pour lui entre 12 F.26 et 12 F.27 il n'y a rien ?

– les décimaux étant définis à partir du recollement de deux entiers, ceci risque d'entraîner certains élèves à adapter à l'ensemble $\mathbb{D}$ des règles "qui marchent bien sur $\mathbb{N}$".

C'est ainsi que certains n'hésiteront pas à écrire $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9$ aussi bien que $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$ multipliant entre elles parties entières d'une part, parties décimales de l'autre avant de recoller les morceaux !

2-2 – Présentation à partir d'un changement d'unité.

Les maîtres y sont invités par les programmes officiels.

Une ville compte 10 850 habitants. *Le millier* étant choisi comme unité la population s'exprime par le *nombre décimal* 10,850.

La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité.

Afin de bien comprendre la signification de la virgule, on peut reprendre l'exercice de groupement du paragraphe 22 dans une numération où le groupement de base est le groupement par quatre :

Lorsque l'enfant est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1 2 3.

Lorsque le "groupe" (quatre enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 12,3.

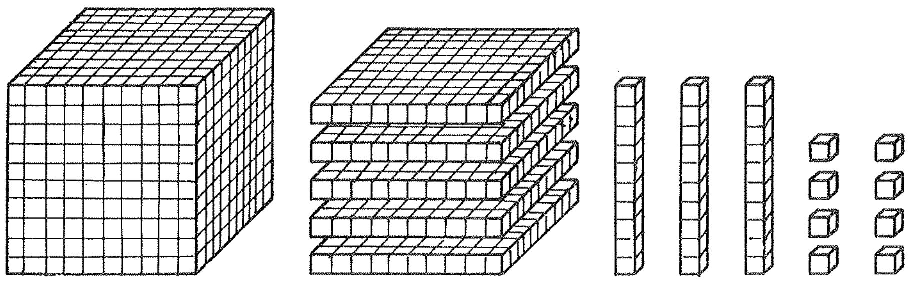
Lorsque le "grand groupe" (seize enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1,23.

D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique.

On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

Les livres suivent en général cette démarche et introduisent alors les décimaux **à partir d'un matériel déjà utilisé** pour la numération (cubes - barres - plaques . . .) comme le fait par exemple : MATHEMATIQUE CONTEMPORAINE (Thirioux) MAGNARD.

I Choix d'une unité-repère. Cardinal d'un ensemble



On a effectué les groupements par dix à partir d'un ensemble A de petits cubes.
Ecris le cardinal de A en prenant la petite plaque pour unité-repère.
Quelle est la partie entière du nombre obtenu ?
5 est le chiffre des unités, 1 celui des dizaines, 3 est appelé le chiffre des dixièmes, 8 celui des centièmes.

Tableau d'écriture des nombres décimaux :

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
1	2	5	3	6	
	2	0	1	2	
	1	1	0	0	3

↑ position de la virgule.

Dans cette présentation, le décimal apparaît comme un autre codage d'un naturel, ce qui occulte le fait d'une part, que les décimaux sont de nouveaux nombres, d'autre part, qu'entre deux nombres on peut toujours intercaler autant de décimaux qu'on le veut.

Le système de référence mis en place dans cette introduction (125,36 est un autre codage du nombre de petits cubes : 12 536 obtenu en prenant pour unité la centaine) va entraîner tout naturellement un certain nombre d'erreurs. En effet si l'on ajoute un petit cube, on en obtient 12 537. Donc le "suivant" de 125,36 sera bien sûr 125,37 et il n'y aura pas de décimal entre 125,36 et 125,37 ! Dire alors aux élèves que 125,365 est un décimal compris entre 125,36 et 125,37 revient tout simplement à démolir le système de référence mis en place par l'introduction choisie.

Pour obtenir 125,365 il aurait fallu coder 125 365 petits cubes en prenant cette fois pour unité le millier. La plupart des enfants, se référant au petit cube et ne pouvant manier simultanément deux changements d'unités sont amenés à comparer 12 536, 12 537 et 125 365.

Comme $12536 < 12\,537 < 125\,365$, il en résulte l'inégalité proposée par les élèves :

$$125{,}36 < 125{,}37 < 125{,}365$$

Pour sortir de cette impasse, les maîtres ont le plus souvent recours à la "mise au même format à droite" par l'intermédiaire du tableau suivant.

centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
1	2	5 ,	3	6	0
1	2	5 ,	3	6	5
		↑	position de la virgule.		

On quitte la référence précédente pour donner au décimal une autre signification dans laquelle 0,1 ; 0,01 ; 0,001 seront de "nouveaux nombres" définis alors en général comme la dixième partie de l'unité (ou la centième, ou la millième) à partir du système métrique.
Que la synthèse de tout cela par nos élèves soit particulièrement aisée à faire tiendrait du miracle !

Il ne faut donc pas s'étonner des résultats obtenus en I :

$7{,}3 < 7{,}28 < 7{,}40$ parce que $73 < 728 < 7\,401$

ou encore $3 < 3{,}9 < 3{,}09$ parce que $3 < 39 < 309$!

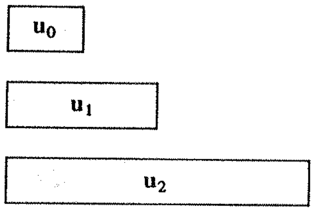
2-3 – Présentation mixte ou encore variante dite moderne de la méthode "traditionnelle".

On en trouve un exemple dans MATH et CALCUL (R. Eiler)
Cours moyen 1ère année – Edition 1975.

NOMBRES À VIRGULE

1 Cas d'une base quelconque

A **a)** Observe les étalons ci-contre.

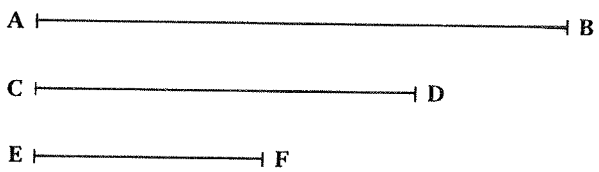


◇ Vérifie que la mesure de la longueur de la bande $\mathbf{u_1}$ est le *double* de celle de la bande $\mathbf{u_0}$
que la mesure de la longueur de la bande $\mathbf{u_2}$ est le *double* de celle de la bande $\mathbf{u_1}$.

Que peux-tu dire de la mesure de la bande $\mathbf{u_2}$ par rapport à celle de la bande $\mathbf{u_0}$?

◇ Découpe des bandes de même longueur que les bandes étalons ci-dessus.

A l'aide de ces bandes, mesure les segments ci-contre et inscris les résultats dans le tableau ci-dessous.



	mesures		
segments	$\mathbf{u_2}$	$\mathbf{u_1}$	$\mathbf{u_0}$
[**A**, **B**]			
[**C**, **D**]	1	0	1
[**E**, **F**]			

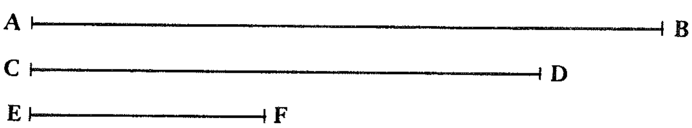
– Si on choisit comme étalon la bande $\mathbf{u_0}$ la mesure de [**C**, **D**] s'écrit 101.
Écris la mesure des autres segments moyennant cet étalon $\mathbf{u_0}$.

– Si on choisit comme étalon la bande $\mathbf{u_1}$ la mesure de [**C**, **D**] s'écrit 10,1
Écris la mesure des autres segments moyennant cet étalon $\mathbf{u_1}$.

– Écris la mesure de chacun des trois segments en prenant comme unité l'étalon $\mathbf{u_2}$.

2 Cas de la base dix

A En te servant de ton double décimètre trouve la mesure de chacun des segments ci-dessous et reporte les résultats dans le tableau prévu à cet effet.



	mesures			
segments	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
[**A**, **B**]				
[**C**, **D**]				
[**E**, **F**]				

◇ Reproduis et complète :

m-mes.	[**A**, **B**]	
dm-mes.	[**A**, **B**]	
cm-mes.	[**A**, **B**]	
mm-mes.	[**A**, **B**]	
cm-mes.	[**C**, **D**]	
mm-mes.	[**E**, **F**]	
m-mes.	[**C**, **D**]	
cm-mes.	[**E**, **F**]	
dm-mes.	[**C**, **D**]	
m-mes	[**E**, **F**]	

Il s'agit ici d'introduire les décimaux par codage de mesure de grandeur dans une base quelconque, suivi d'un changement d'unité.

L'étude du cas d'une base quelconque apparaît en fait plus comme un exercice de style compliquant les choses que comme une nécessité véritable. En effet, pour passer des nombres à virgule dans la base deux (base utilisée dans le 1er paragraphe de l'introduction) aux nombres à virgule dans la base dix, les décimaux, on s'empresse de revenir au double-décimètre, ce qui rejoint finalement le mode de présentation des décimaux par la méthode dite traditionnelle, on retombe finalement sur tous les inconvénients de cette première méthode (2.1).

2-4 – Méthode d'intercalation de points sur une droite numérique.

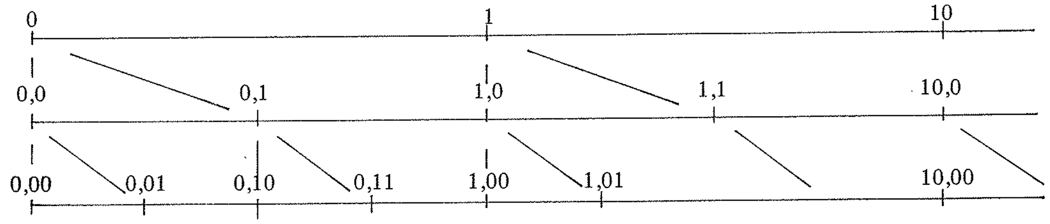
Un exemple en est donné par les livres de Nicole PICARD.

On commence en général par proposer des exercices de codage liés à des problèmes d'intercalation. Par exemple codage de nouvelles maisons dans une rue ou encore de nouvelles stations de métro ouvertes dans une ligne donnée ou encore codage de livres d'une bibliothèque.

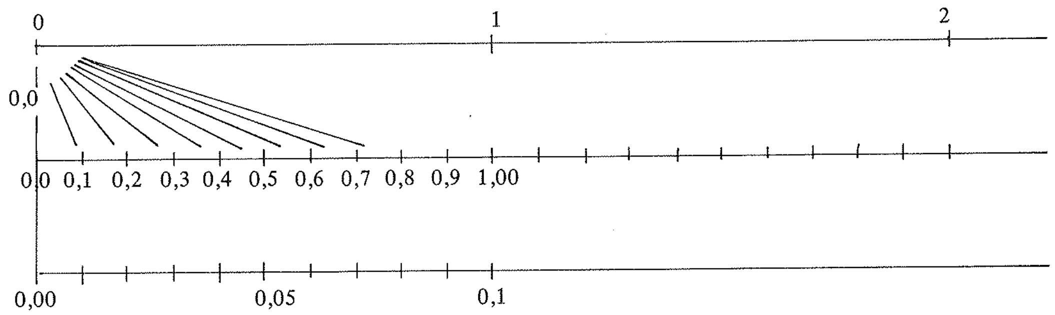
Ceci est suivi d'un travail sur l'ordre lexicographique (c'est-à-dire l'ordre permettant de ranger les mots dans un dictionnaire) destiné à montrer en quoi cet ordre est différent de l'ordre sur les naturels.

On fait ensuite un travail systématique de codage de points.

– d'abord en base deux :



– puis en base dix :



Cette méthode a elle aussi un certain nombre d'inconvénients :

– l'introduction (codage de maisons, de livres . . .) faite dans les classes est souvent artificielle ;

– le codage sur lequel on finit par se mettre d'accord a un côté très formel ;

– d'autre part, le lien entre les ensembles ordonnés ainsi obtenus et l'ensemble des décimaux n'est pas toujours clair, la signification des symboles utilisés pour le codage des maisons ou des livres n'étant pas au départ numérique ;

– de plus, on ne sait pas faire d'opérations avec ces codages.

– Enfin cette méthode nécessite un travail important sur la base deux et surtout privilégie trop vite le modèle des longueurs en attachant systématiquement les nombres à virgule à des points situés sur une droite, d'où le risque de créer des problèmes lors de l'utilisation des nombres décimaux dans d'autres situations.

Cependant, le fait de visualiser les nombres décimaux sur la droite numérique, malgré l'inconvénient souligné dans le paragraphe précédent a certains avantages. Il favorise :

1 – la compréhension de ce que les écritures 3 ; 3,0 ; 3,00 ; 3,000 ; ... représentent bien le même nombre (de même pour 3,1 ; 3,10 ; 3,100 ; ...).

2 – le rangement des décimaux. En effet il est clair cette fois que $3 < 3{,}09 < 3{,}9$ car on a $3{,}00 < 3{,}09 < 3{,}90$

3 – l'intercalation d'un décimal entre deux décimaux donnés. Entre 12,25 et 12,26 on peut mettre 12,251 car $12{,}250 < 12{,}251 < 12{,}260$
mais aussi 12,25 15 car $12{,}2500 < 12{,}2515 < 12{,}2600$

Cette méthode a donc sur les méthodes précédentes un avantage : elle présente les décimaux comme des nombres nouveaux que l'on peut intercaler entre deux entiers consécutifs, permet de comprendre aisément qu'entre deux décimaux donnés, on peut toujours en intercaler un troisième, donc un nombre aussi grand de décimaux qu'on le veut, enfin donne de bons résultats pour l'ordre sur les décimaux.

Remarque : Après cette étude critique des différentes présentations usuelles, le lecteur s'attend peut-être à trouver une introduction des décimaux satisfaisante à nos yeux. Nous préférons donc préciser ici qu'il n'y a pas pour nous de méthode idéale, que l'on pourrait proposer comme modèle pour l'introduction des décimaux. Il nous semble par contre que les méthodes d'introduction doivent quelles qu'elles soient, éviter de créer un certain nombre d'obstacles qui risqueraient d'entraîner par la suite l'élève vers des incompréhensions difficiles à surmonter. C'est pour cela qu'il nous semble important de cerner les objectifs poursuivis et de déterminer quelques lignes directrices susceptibles de guider l'action pédagogique.

III – QUELQUES IDEES A PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX.

3.1 – Evolution des objectifs.

Jetons un coup d'œil rapide sur l'histoire des décimaux afin de mieux saisir l'évolution concernant l'utilisation et l'apprentissage des décimaux

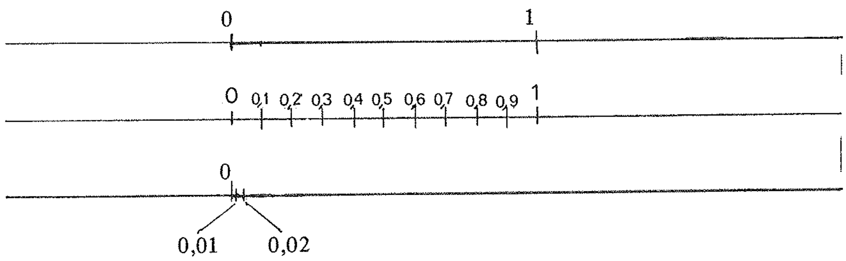
En effet tout nombre réel non rationnel est difficile à appréhender et à utiliser. Aussi une façon de les traiter est d'en donner une approximation décimale. Par exemple $\sqrt{2}$ et π peuvent être approchés par la suite des nombres décimaux suivants

	$\sqrt{2}$	π
à 10^{-1} près	1,4	3,1
à 10^{-2} près	1,41	3,14
à 10^{-3} près	1,414	3,141
à 10^{-4} près	1,4142	3,1415
etc		. . . . .

On peut aussi donner des approximations des réels à l'aide de rationnels. C'est ce que l'on fait lorsqu'on dit que $\frac{22}{7}$ est une valeur approchée de π. Mais en fait ce sont les décimaux qui sont utilisés de manière privilégiée.

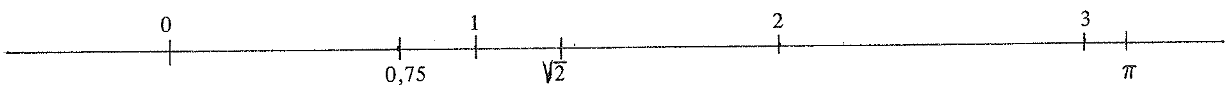
En fait :

- **Les décimaux** s'organisent en un système unique de graduations emboîtées



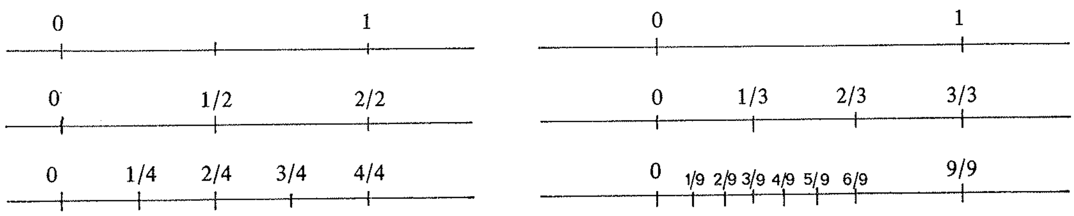
ce qui nous permet – de donner une image géométrique des nombres réels sur la droite numérique.

En effet : 2 ; π ; 1 ; 0,75 peuvent être représentés par les points suivants sur la droite :



– de donner de chaque nombre réel un encadrement à 10^{-n} près.

- **Les rationnels** apparaissent nettement plus compliqués, car ceux-ci s'organisent en plusieurs systèmes de graduations emboîtés non "compatibles" par exemple :



La représentation géométrique est donc beaucoup plus compliquée et les procédures pour encadrer les réels sont plus difficiles.

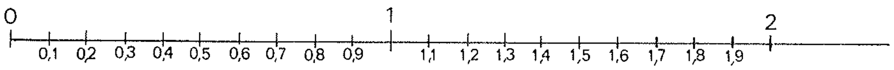
En conclusion :

Les décimaux sont de nouveaux nombres, distincts des entiers, qui représentent une étape pour approcher l'ensemble des nombres réels.

Notons au passage qu'ils permettent aussi d'approcher les nombres rationnels : c'est ce que nous faisons quand nous décidons "d'anoter une division". La quotient approché de 22 par 7 à 10^{-3} près est 3,142 signifie que l'écart entre le rationnel $\frac{22}{7}$ et le décimal 3,142 est inférieur à un millième.

Parallèlement à cela, il faut bien voir que les décimaux sont utilisés comme un outil dans toutes les activités humaines, en particulier celles faisant intervenir les mesures. Regardons cela d'un peu plus près.

Nous pouvons utiliser les décimaux pour repérer les points d'une échelle régulière, ce qui donne les graduations :



Or nous pouvons utiliser de telles échelles pour mesurer des longueurs. Un nombre décimal sera utilisé ainsi simultanément selon deux points de vue :

– comme les codes d'un point sur la droite numérique

– comme distance de l'origine 0 à ce point.

Si l'unité choisie sur l'échelle est une unité légale (par exemple le mètre) alors on peut remplacer des mesures notées de manière complexe (par exemple 3 m 5 dm 7 cm) par une notation à l'aide des décimaux (par exemple 3,57 mètres).

Cette simplicité au niveau des écritures ainsi qu'au niveau des opérations fait que toutes les sciences utilisant les décimaux et en particulier toutes les machines à calculs sont programmées pour faire des calculs avec les décimaux : il est d'ailleurs probable que l'apparition généralisée des calculettes aura une influence au niveau de l'apprentissage des décimaux.

De ces diverses considérations nous pouvons, en résumé, retenir quelques lignes directrices dans l'apprentissage des décimaux.

BIBLIOGRAPHIE

1 – Histoire des mathématiques – *Jean-Paul COLETTE*
(Ed. du renouveau pédagogique)

2 – Compte rendu des journées P.E.N. – A.P.M. – I.R.E.M.
(Plestin-les-Grèves – 29-30 Avril 1977) I.R.E.M. de RENNES
Groupe A5 : Les décimaux au C.M.

3 – Obstacles épistémologiques et Obstacles didactiques.
"Problèmes dans l'apprentissage des nombres décimaux : un exemple d'obstacle didactique"
Cahier de l'I.R.E.M. de BORDEAUX.

4 – "Aperçu sur les connaissances des enfants en mathématiques à la fin du C.M 2"
ZOOM AVANT n° 11 (Octobre 1978)
Ecoles Normales – I.R.E.M. de LYON.

5 – "Sur quelques thèmes fondamentaux à l'Ecole élémentaire"
DECIMAUX *(Robert NEYRET)*
GRAND N n° 17.