Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2011 du sujet du PG1

Denis Vekemans *

PROBLÈME 1

PARTIE A : La sécurité

1.
$$D_A = D_R + D_F.$$

(a) $v_1 = 90km/h = 90 \times (1\ 000m)/(3600s) = 25m/s$. Une lecture graphique donne alors une distance de freinage D_{F_1} voisine de $51m$ (au mètre près).
$v_1 = 130km/h = 130 \times (1\ 000m)/(3600s) = \frac{325}{9}m/s = 36,\overline{1}m/s$. Une lecture graphique donne alors une distance de freinage D_{F_2} voisine de $104m$ (au mètre près).

(b) À la vitesse v_1, la distance de réaction est $D_{R_1} = 25m/s \times 1s = 25m$. Puis, la distance d'arrêt est voisine de $D_{A_1} = D_{R_1} + D_{F_1} = 25m + 51m = 76m$ (au mètre près).
À la vitesse v_2, la distance de réaction est $D_{R_2} = 36,\overline{1}m/s \times 1s = 36,\overline{1}m$. Puis, la distance d'arrêt est voisine de $D_{A_2} = D_{R_2} + D_{F_2} = 36,\overline{1}m + 104m = 140,\overline{1}m$ (au mètre près).

(c) Le temps de réaction est de $1s$. Si la distance de réaction D_R est de $15m$, c'est que la vitesse est de $v = 15m/s = 15 \times (km/1000)/(h/3600) = 54km/h$.

(d) À la vitesse $v = 15m/s$, la distance de réaction est $D_R = 15m$. Une lecture graphique donne alors une distance de freinage D_F voisine de $17m$ (au mètre près). Puis, la distance d'arrêt est voisine de $D_A = D_R + D_F = 15m + 17m = 32m$ (au mètre près).

2. (a) En considérant les parallèles (OH) et (LK) (qui sont deux droites parallèles car perpendiculaires à une même troisième : (HM)) et les sécantes (HM) et (OM), le théorème de Thalès dans la configuration du triangle nous donne
$$\frac{HM}{KM}(= \frac{OM}{LM}) = \frac{OH}{LK}.$$
On déduit $\frac{HM}{HM-HK} = \frac{OH}{LK}$ (car K appartient au segment $[HM]$), puis $\frac{HM}{HM-3m} = \frac{0,8m}{0,76m}$ et $HM = 60m$. Comme $HM > 45m$, le véhicule ainsi chargé ne respecte pas les consignes de sécurité.

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

(b) Comme précédemment, on a $\frac{HM}{HM-HK} = \frac{OH}{LK}$. Puis $HM = \frac{OH}{OH-LK}HK$.
Ensuite $HM < 45m$ induit que $\frac{OH}{OH-LK}HK < 45m$ ou $\frac{0,8m}{0,8m-LK}3m < 45m$, puis $LK < \frac{56}{75}m = 0,74\overline{6}m$. Pour respecter la consigne de sécurité, la plus grande longueur LK possible est $0,74\overline{6}m$, ce qui donne $75cm$, arrondi au cm.

3. Soit x le dénivelé vertical correspondant à une descente de $2,5km$.

   La pente étant de 10%, à un dénivelé vertical x correspond un trajet horizontal de $10 \times x$.

   L'angle droit entre le trajet horizontal et le dénivelé vertical permet d'obtenir, en utilisant le théorème de Pythagore,
$$x^2 + (10 \times x)^2 = (2\ 500m)^2.$$
   La résolution de cette équation mène à $x = \frac{2\ 500}{\sqrt{101}}m$, ce qui donne un dénivelé vertical de $249m$ lorsque l'on arrondit au mètre près.

PARTIE B : Les accidents

1. Entre 20h et 24h, il y a $3\ 595 + 2\ 645 + 1\ 908 + 1\ 698$ accidents parmi 76 309, ce qui représente $\frac{9\ 846}{76\ 309} \times 100\%$ (soit 13%, arrondi au % près) des accidents.
   L'affirmation de la personne est donc **fausse**.

2. En $B4$: "$= B2/\$Z\$2 \times 100$" en mode "nombre" (et non en mode "pourcentage" car dans ce cas, la formule serait "$= B2/\$Z\$2$") et affichage de "0" décimales.

   En $C4$: "$= somme(\$B\$2 : C2)/\$Z\$2 \times 100$" en mode "nombre" (et non en mode "pourcentage" car dans ce cas, la formule serait "$= somme(\$B\$2 : C2)/\$Z\$2$") et affichage de "0" décimales.

   Remarque. Une autre possibilité serait en $C4$: "$= B4 + C2/\$Z\$2 \times 100$" en mode "nombre" (et non en mode "pourcentage" car dans ce cas, la formule serait "$= B4 + C2/\$Z\$2$") et affichage de "0" décimales.

   La formule en $C4$ peut être recopiée de la cellule $D4$ à la cellule $Y4$ (cellules $D4$ et $Y4$ incluses).

3. On a bien évidemment $T4 = S4 + T3$ (en vraies valeurs).

   En supposant que les résultats affichés sont arrondis au % le plus proche,
   - la valeur de $S4$ est comprise entre $70,5$ et $71,5$;
   - la valeur de $T3$ est comprise entre $8,5$ et $9,5$;
   - donc, la valeur de $S4 + T3$ est comprise entre $79 = 70,5 + 8,5$ et $81 = 71,5 + 9,5$;
   - et d'autre part, la valeur de $T4$ est comprise entre $80,5$ et $81,5$.

   Il n'y a aucune contradiction dans tout cela, cela induit simplement que la valeur dans $T4$ est finalement comprise entre $80,5$ et 81 (conjonction des items 3 et 4 concernant $S4 + T3$ et $T4$). Si, effectivement, $71 + 9 = 80 \neq 81$, il ne faut pas oublier que les valeurs affichées ne sont pas les valeurs exactes, mais des valeurs approchées des valeurs réelles.

PARTIE C : Consommation de carburant

1. L'automobile hybride parcourt x km en ville et y $km = (350 - x)$ km en zone mixte (en tenant compte du parcours total de $350km$.

   Elle consomme par conséquent $\frac{x}{100} \times 5L$ en ville et $\frac{350-x}{100} \times 4,2L$ en zone mixte.

   On déduit que
   $$\frac{x}{100} \times 5 + \frac{350-x}{100} \times 4,2 = 16,3.$$
   Puis, $\frac{x}{100} \times (5 - 4,2) = 16,3 - \frac{350}{100} \times 4,2$ et $x = 200$.

   L'automobile hybride exécute un parcours de $200km$ en ville et de $150km = (350 - 200)km$ en zone mixte

2. Le véhicule classique exécute un parcours de $200km$ en ville et de $150km$ en zone mixte (car le trajet est le même que pour l'automobile hybride).

   Pour son parcours en ville, il utilise donc $\frac{200}{8}L = 25L$ de carburant ; pour son parcours en zone mixte, il utilise donc $\frac{150}{10}L = 15L$ de carburant. Il utilise donc au total $25L + 15L = 40L$ de carburant.

   L'automobile hybride utilise $16,3L$ de carburant alors que le véhicule classique utilise $40L$ pour le même parcours. L'automobile hybride utilise donc $40L - 16,3L = 23,7L$ de moins que le véhicule classique.

PROBLÈME 2

1. (a)
$$\begin{aligned}\overline{102}^{(3)} &= 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 2\\ &= 11\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}74 &= 24 \times 3 + 2\\ &= (8 \times 3) \times 3 + 2\\ &= ((2 \times 3 + 2) \times 3) \times 3 + 2\\ &= 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2\\ &= \overline{2202}^{(3)}\end{aligned}$$

   (c) L'écriture de n en base 3 se termine par un 0 équivaut à dire que n est divisible par 3.

   Démonstration.

   Sens direct.

   L'écriture de n en base 3 se termine par un 0. Donc, il existe des chiffres a_k, a_{k-1}, ..., a_1 et $a_0 = 0$ tels que
$$\begin{aligned}n &= a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + a_1 \times 3 + \underbrace{a_0}_{=0}\\ &= 3 \times \left(a_k \times 3^{k-1} + a_{k-1} \times 3^{k-2} + \ldots + a_1\right).\end{aligned}$$

   Et, n est divisible par 3.

Réciproquement.

n est divisible par 3. Donc, il existe un nombre entier naturel n' tel que $n = 3 \times n'$. Puis, il existe des chiffres a'_k, a'_{k-1}, ..., a'_1 et a'_0 tels que $n' = a'_k \times 3^k + a'_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + a'_1 \times 3 + a'_0$ et ainsi, $n = 3 \times n' = a'_k \times 3^{k+1} + a'_{k-1} \times 3^k + \ldots + a'_1 \times 3^2 + a'_0 \times 3$. Par conséquent l'écriture de n en base 3 se termine par un 0.

2. (a) **Parmi les nombres qui possèdent** 5 **chiffres en base** 3 :
   - $81 = \overline{10000}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $82 = \overline{10001}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $83 = \overline{10002}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $84 = \overline{10010}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $85 = \overline{10011}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $86 = \overline{10012}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $87 = \overline{10020}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $88 = \overline{10021}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $89 = \overline{10022}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $90 = \overline{10100}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $91 = \overline{10101}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $92 = \overline{10102}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $93 = \overline{10110}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $94 = \overline{10111}^{(3)}$ est 2-lacunaire.
   - $95 = \overline{10112}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $96 = \overline{10120}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $97 = \overline{10121}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $98 = \overline{10122}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $99 = \overline{10200}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.
   - $100 = \overline{10201}^{(3)}$ n'est pas 2-lacunaire.

   Il y a donc 8 nombres 2-lacunaires.

   Parmi les nombres qui possèdent au plus 4 **(**4 **étant compris) chiffres en base** 3, il y en a $2^4 = 16$ qui sont 2-lacunaires (le premier chiffre est 0 ou 1 : idem pour le second chiffre ; idem pour le troisième chiffre ; et idem pour le quatrième chiffre).

   Conclusion. Entre 0 (inclus) et 100, il y a $8 + 16 = 24$ nombres 2-lacunaires.

   (b) Un nombre 2-lacunaire possédant 4 chiffres en base 3 est divisible par 3 si et seulement si il possède un nombre pair de 1 dans son écriture en base 3.

   Une démonstration par exhaustion (sur tous les nombres 2-lacunaires possédant 4 chiffres en base

3) suffit pour prouver ce résultat :

nombre en base 3	parité du nombre de 1	divisible ou non par 2
$27 = \overline{1000}^{(3)}$	non	non
$28 = \overline{1001}^{(3)}$	oui	oui
$30 = \overline{1010}^{(3)}$	oui	oui
$31 = \overline{1011}^{(3)}$	non	non
$36 = \overline{1100}^{(3)}$	oui	oui
$37 = \overline{1101}^{(3)}$	non	non
$39 = \overline{1110}^{(3)}$	non	non
$40 = \overline{1111}^{(3)}$	oui	oui

3. (a) Si n est 1-lacunaire, alors, il existe des chiffres $a_i \in \{0, 2\}$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k) tels que $n = a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + a_1 \times 3 + a_0$.

   Cependant,
   - si $a_i = 0$, alors on pose $b_i = 0$ et $a_i = 2 \times b_i$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k) ;
   - et si $a_i = 2$, alors on pose $b_i = 1$ et $a_i = 2 \times b_i$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k).

   Ainsi, $n = 2 \times (b_k \times 3^k + b_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + b_1 \times 3 + b_0)$ est bien le double d'un nombre 2-lacunaire (à savoir, n est le double de $b_k \times 3^k + b_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + b_1 \times 3 + b_0$ qui est 2-lacunaire).

   (b) Soit n donné, alors, il existe des chiffres $a_i \in \{0, 1, 2\}$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k) tels que $n = a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + a_1 \times 3 + a_0$.

   Cependant,
   - si $a_i = 0$, alors on pose $b_i = 0$ et $c_i = 0$, puis $a_i = b_i + c_i$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k) ;
   - si $a_i = 1$, alors on pose $b_i = 0$ et $c_i = 1$, puis $a_i = b_i + c_i$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k) ;
   - si $a_i = 2$, alors on pose $b_i = 2$ et $c_i = 0$, puis $a_i = b_i + c_i$ (pour tout i entier naturel compris au sens large entre 0 et k) ;

   Ainsi, $n = (b_k \times 3^k + b_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + b_1 \times 3 + b_0) + (c_k \times 3^k + c_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + c_1 \times 3 + c_0)$ est bien somme d'un nombre 1-lacunaire et d'un nombre 2-lacunaire (à savoir, n est la somme de $b_k \times 3^k + b_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + b_1 \times 3 + b_0$ qui est 1-lacunaire et de $c_k \times 3^k + c_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + c_1 \times 3 + c_0$ qui est 2-lacunaire).

   (c) Un exemple pour lequel on a deux décompositions comme somme d'un nombre 1-lacunaire et d'un nombre 2-lacunaire suffit à montrer que la décomposition du 3.(b). n'est pas la seule possible.

   Si on considère le nombre $\overline{210}^{(3)}$, la décomposition suggérée au 3.(b). est

$$\overline{210}^{(3)} = \underbrace{\overline{200}^{(3)}}_{\text{1-lacunaire}} + \underbrace{\overline{10}^{(3)}}_{\text{2-lacunaire}} .$$

Mais, on a également

$$\overline{210}^{(3)} = \underbrace{\overline{22}^{(3)}}_{\text{1-lacunaire}} + \underbrace{\overline{111}^{(3)}}_{\text{2-lacunaire}} .$$