Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2012 du sujet du PG1

Denis Vekemans *

Exercice 1

Affirmation 1 Un nombre positif est toujours supérieur ou égal à sa racine carrée.

Faux ! En effet, $0 < 0,25 < \sqrt{0,25} = 0,5$.

Remarque : il n'est pas stipulé que le nombre est entier naturel (cette propriété serait vraie sur l'ensemble des nombres entiers naturels).

Affirmation 2 La fraction $\dfrac{201\ 134\ 546\ 112}{145\ 261\ 781\ 121}$ est irréductible.

Faux ! En effet, numérateur et dénominateur sont tous deux divisibles par 3 (le critère de divisibilité par 3 dit qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est) et la fraction est donc simplifiable.

Affirmation 3 La probabilité que le chocolat extrait du sachet soit blanc est de $\dfrac{4}{7}$.

Faux ! La formule de Laplace donne cette probabilité égale à $\dfrac{20}{20+35} = \dfrac{4}{11} \neq \dfrac{4}{7}$.

Affirmation 4 L'extrait souligné est exact.

Faux ! Sur une augmentation de $23,8\%$ en 2008 par rapport à 2009, le nombre serait porté à $25 \times 1,238 = 30,95 \neq 32,8$.

Affirmation 5 Il existe au moins un nombre entier compris entre 11 000 et 12 000, dont le plus grand diviseur commun avec 2 180 est 545.

Vrai ! Le nombre cherché entre 11 000 et 12 000 est un multiple de 545. C'est donc, soit le nombre $11\ 445 = 21 \times 545$ soit le nombre $11\ 990 = 22 \times 545$.

Premier cas : si le nombre cherché est $11\ 445 = 3 \times 7 \times 545$, alors il admet comme PGCD avec $2\ 180 = 2^2 \times 545$ le nombre 545 (l'algorithme d'Euclide permet l'obtention de ce résultat) et convient.

Second cas : si le nombre cherché est $11\ 990 = 2 \times 11 \times 545$, alors il admet comme PGCD avec $2\ 180 = 2^2 \times 545$ le nombre $2 \times 545 = 1090$ (l'algorithme d'Euclide permet l'obtention de ce résultat) et ne convient pas.

Conclusion : le nombre 11 445 est le seul qui réponde aux conditions de l'énoncé.

Affirmation 6 Il faut $112,5$ g de peinture pour recouvrir la petite boule.

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

Interprétation des données : "l'une pèse 24 kg et l'autre pèse 3 kg" est une donnée qui concerne les boules avant qu'elles soient recouvertes de peinture.

Faux ! Le taux d'agrandissement d'une figure agit au simple sur les longueurs, donc au carré sur les aires (ou sur la quantité de peinture qui est proportionnelle à l'aire) et au cube sur les volumes (ou sur le poids de la boule qui est proportionnel au volume).

Soit r le rayon de la petite boule et R celui de la grosse boule.

Soit p le poids de la petite boule et P celui de la grosse boule. On a $v = k \times r^3$ et $V = k \times R^3$, donc $\dfrac{v}{V} = \dfrac{r^3}{R^3} = \dfrac{1}{8}$ puis $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2}$.

Soit m la quantité de peinture nécessaire pour peindre la petite boule et M celui pour la grosse boule. On a $m = \kappa \times r^2$ et $M = \kappa \times R^2$, donc $\dfrac{m}{M} = \dfrac{r^2}{R^2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ puis $\dfrac{m}{M} = \dfrac{1}{4}$ ou $m = \dfrac{900\ g}{4} = 225\ g \neq 112,5\ g$.

Exercice 2

1. (a) $3^2 + 4^2 = 5^2$, donc $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien.
   (b) $(3 \times n)^2 + (4 \times n)^2 = 9 \times n^2 + 16 \times n^2 = 25 \times n^2 = (5 \times n)^2$, donc $(3 \times n, 4 \times n, 5 \times n)$ est un triplet pythagoricien.
   (c) Pour $n = 1\ 000$ (par exemple), $(3\ 000, 4\ 000, 5\ 000)$ est un triplet pythagoricien.
2. (a) On entre en $D2$ la formule $= B2^2 - A2^2$ (on aurait aussi pu fixer les colonnes et entrer $= \$B2^2 - \$A2^2$).
   (b) – Dans la colonne concernant les valeurs de a, on va trouver la valeur $2 \times 4 \times 5 = 40$;
   – dans la colonne concernant les valeurs de b, on va trouver la valeur $5^2 - 4^2 = 9$;
   – dans la colonne concernant les valeurs de c, on va trouver la valeur $5^2 + 4^2 = 41$;
   – dans la colonne concernant les valeurs de $a^2 + b^2$, on va trouver la valeur $40^2 + 9^2 = 1\ 600 + 81 = 1\ 681$;
   – dans la colonne concernant les valeurs de c^2, on va trouver la valeur $41^2 = 1\ 681$.
   (c) Il semble que le triplet (a, b, c) soit pythagoricien.

   Démonstration.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2 \times x \times y)^2 + (y^2 - x^2)^2 \\ &= 4 \times x^2 \times y^2 + y^4 - 2 \times x^2 \times y^2 + x^4 \\ &= y^4 + 2 \times x^2 \times y^2 + x^4 \\ &= (y^2 + x^2)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

   Et, le triplet (a, b, c) est pythagoricien.
3. *Remarque.* Cette question est mal posée. Il faut d'abord comprendre que les entiers sont naturels (sinon le triplet $(-1, 0, 1)$ convient aussi) et ensuite, il faut comprendre que le triplet (a, b, c) est tel que $a \leq b \leq c$ (sinon le triplet $(4, 3, 5)$ convient aussi).

La question se réécrit donc : se peut-il que pour $n \in \mathbb{N}$, $(n)^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$? ou se peut-il que pour $n \in \mathbb{N}$, $n^2 = 2 \times n + 3$?

$n = 0$ ne convient pas ; $n = 1$ ne convient pas ; $n = 2$ ne convient pas ; $n = 3$ convient !

Si $n \geq 4$, $n^2 \geq 4 \times n$ et $2 \times n + 3 < 3 \times n$, donc il est impossible dans ce cas que $n^2 = 2 \times n + 3$.

Conculsion, $(3, 4, 5)$ est le seul (après avoir corrigé la question) triplet pythagoricien composé de 3 entiers consécutifs.

Exercice 3

1. Dans le triangle AHC, rectangle en H, on a $AH^2 + HC^2 = 13^2$ (d'après le théorème de Pythagore). De même, dans le triangle BHC, rectangle en H, on a $BH^2 + HC^2 = 15^2$. Par différence, on déduit

$$\begin{aligned} BH^2 - AH^2 &= 15^{-}13^2 \\ &= (15-13) \times (15+13) \\ &= 56 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} BH^2 - AH^2 &= (BH - AH) \times (BH + AH) \\ &= (BH - AH) \times 14, \end{aligned}$$

donc $BH - AH = 4$. Nous sommes donc amenés à résoudre le système linéaire à 2 équations et 2 inconnues suivant :

$$\begin{cases} BH + AH = 14 \\ BH - AH = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} AH = 5 \\ BH = 9 \end{cases}$$

Enfin, de $AH^2 + HC^2 = 13^2$, on déduit, en remplaçant AH par sa valeur, que $HC = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$.

2. (a) – Quand $K = A$, on a $K = A = L$, $M = B = N$ et le rectangle est applati : $KL = 0$ et $KN = AB = 14$. La courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0, 14)$.
   – Quand $K = H$, on a $L = C = M$, $K = H = N$ et le rectangle est applati : $KL = HC = 12$ et $KN = 0$. La courbe représentative passe par le point de coordonnées $(12, 0)$.

   (b) Graphiquement, on trace la droite d'équation $KN = KL$ (un rectangle qui posséde deux côtés consécutifs de même longueur est un carré) qui coupe la courbe pour un certain KN compris entre 6 et 7.

3. (a) En considérant les sécantes (AC) et (AH) et les parallèles (KL) et (HC) (deux droites perpendiculaires à une même troisième, sont parallèles entre elles), le théorème de Thalès donne :

$$\frac{AK}{AH} = (\frac{AL}{AC} =)\frac{KL}{HC}.$$

Donc, $AK = \dfrac{AH \times KL}{HC} = \dfrac{5 \times KL}{12}$.

En considérant les sécantes (BC) et (BH) et les parallèles (NM) et (HC) (deux droites perpendiculaires à une même troisième, sont parallèles entre elles), le théorème de Thalès donne :

$$\frac{BN}{BH} = (\frac{BM}{BC} =)\frac{NM}{HC}.$$

Donc, $BN = \dfrac{BH \times NM}{HC} = \dfrac{9 \times KL}{12}$ (car les côtés opposés d'un rectangle sont de même longueur : $KL = NM$).

(b) Comme $14 = AB = AK + KN + NB = \dfrac{5 \times KL}{12} + KN + \dfrac{9 \times KL}{12}$, on déduit $KN = 14 - \dfrac{5 \times KL}{12} - \dfrac{9 \times KL}{12} = 14 - \dfrac{7 \times KL}{6}$.

4. Lorsque $KLMN$ est un carré, on a $KL = KN$ et donc $KN = 14 - \dfrac{7 \times KN}{6}$, puis $\dfrac{13 \times KN}{6} = 14$ ou $KL = KN = \frac{84}{13}$.

   On détermine enfin AK et NB : $AK = \dfrac{5 \times 84}{12 \times 13} = \dfrac{35}{13}$ et $BN = \dfrac{9 \times 84}{12 \times 13} = \dfrac{63}{13}$.