Correction de l'épreuve de mathématiques du CRPE 2011 du sujet du PG3

Denis Vekemans *

Exercice 1

1. **L'affirmation 1 est fausse !**

   Dans la première salle, la somme des âges est de $9 \times 25\ ans = 225\ ans$. Dans la deuxième salle, la somme des âges est de $11 \times 45\ ans = 495\ ans$.

   Sur l'ensemble des deux salles, la somme des âges est donc de $225\ ans + 495\ ans = 720\ ans$ pour $11 + 9 = 20$ personnes. Ceci donne une moyenne de $\frac{720\ ans}{20} = 36\ ans \neq 35\ ans$.

2. **L'affirmation 2 est vraie !**

   Le nombre de choix possibles est de $3 \times 4 = 12$ (3 choix pour le pantalon et 4 choix pour le tee-shirt).

   Le nombre de choix favorables (i.e. où pantalon et tee-shirt sont de même couleur) est de $1 + 1 = 2$ (les deux sont rouges ou les deux sont bleus).

   La formule de Laplace (cas d'équiprobabilité des événements) donne donc une probabilité égale au nombre de choix favorables divisée par le nombre de cas possibles : $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

3. **L'affirmation 3 est vraie !**

   À supposer que les points A, B, C et D sont cocycliques (i.e. situés sur un même cercle), que l'angle $\widehat{ADC}$ mesure 50° et que l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 40°.

   On a $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 50^\circ$, par propriété des points cocycliques lorsque B et D sont du même côté de la droite (AC).

   Dans tout triangle, la somme des angles mesure 180° et par conséquent, dans le triangle ABC, on a

   $$\underbrace{\widehat{ABC}}_{=50^\circ} + \underbrace{\widehat{ACB}}_{=40^\circ} + \widehat{BAC} = 180^\circ,$$

   puis $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

4. **L'affirmation 4 est vraie !**

   La section d'un cylindre de rayon $5cm$ et de hauteur $8cm$ par un plan parallèle à son axe est toujours un rectangle dont un des côtés mesure $8cm$ et l'autre est de mesure variable :

*. Université du Littoral Côte d'Opale ; Laboratoire de mathématiques pures et appliquées Joseph Liouville ; 50, rue Ferdinand Buisson BP 699 ; 62 228 Calais cedex ; France

- quand le plan passe par l'axe, l'autre côté mesure $10cm$;
- quand le plan est tangent au cylindre, l'autre côté mesure $0cm$ (c'est le cas d'un rectangle applati) ;
- entre ces positions extrêmes, l'autre côté prend toutes les mesures comprises entre $0cm$ et $10cm$ et en particulier, quand cet autre côté mesure $8cm$, le rectangle est un carré.

5. **L'affirmation 5 est vraie !**

   En $21h$,
   - en ouvrant uniquement le robinet A, on vide 3 fois la quantité dans la cuve ;
   - en ouvrant uniquement le robinet B, on vide 7 fois la quantité dans la cuve ;
   - donc, en ouvrant les deux robinets en même temps, on vide $3 + 7 = 10$ fois la cuve.

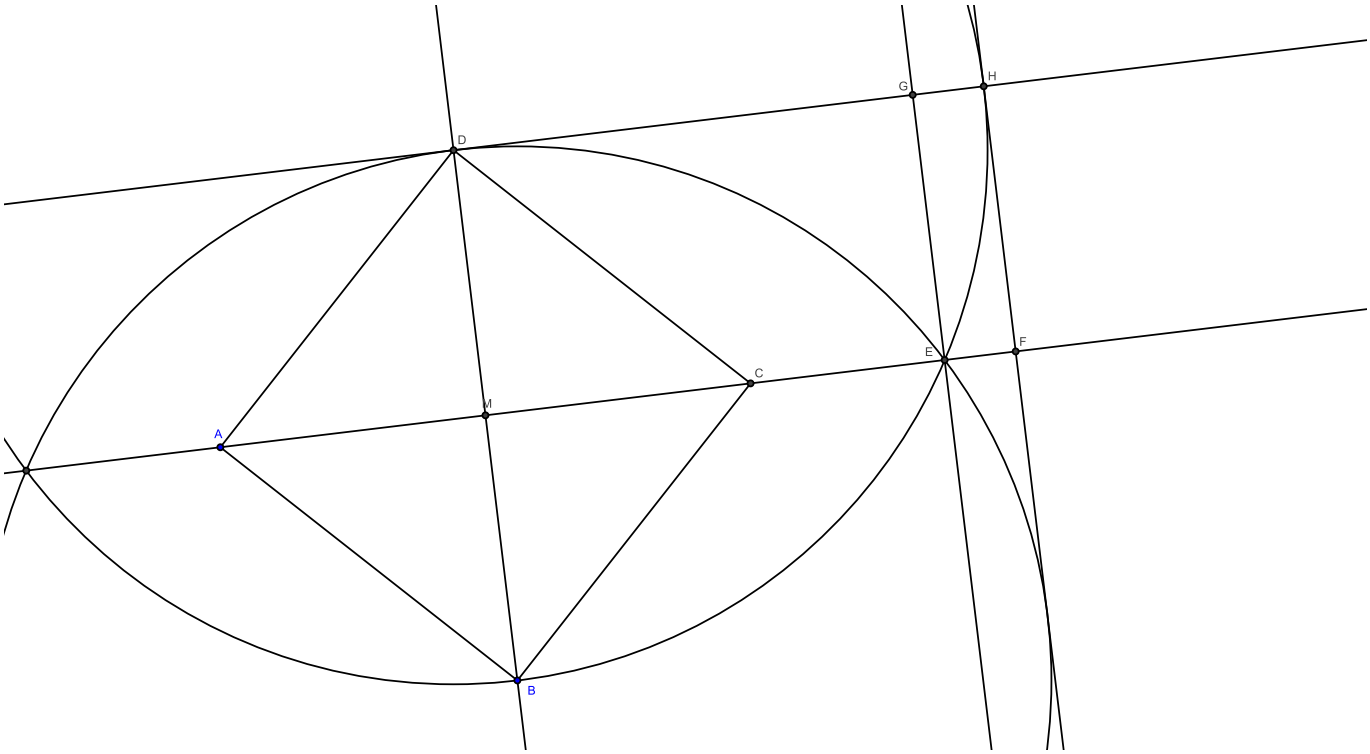
   Donc, on vide 1 fois la cuve en ouvrant les deux robinets en même temps en $\frac{21h}{10} = 2h6min$.

6. **L'affirmation 6 est fausse !**

   Le graphique proposé est relatif à une situation de proportionnalité (fonction linéaire). La situation pourrait être liée au graphique dans le cas où la section "horizontale" de la carafe est d'aire constante (cas d'un prisme droit posé sur sa base, cas d'un cylindre droit posé sur sa base, ...), mais uniquement dans ce cas. Cependant, ici, la section "horizontale" de la carafe n'est pas d'aire constante !

Exercice 2

1. La figure n'est pas à l'échelle.



2. (a) $Aire(MDGE) = MD \times ME$ et $Aire(BDE) = \frac{BD \times ME}{2}$.

   En effet, M est milieu de $[BD]$ (propriété du centre d'un carré), puis M est pied de la hauteur issue de E dans le triangle équilatéral BDE (la médiane est hauteur).

Ensuite, comme $MD = \frac{BD}{2}$, on obtient $Aire(MDGE) = Aire(BDE)$.

(b) $Aire(MDHF) = MD \times MF$ et $Aire(ABCD) = \frac{AC \times BD}{2}$ (formule de l'aire d'un losange). Or, comme M est milieu de $[AC]$ (propriété du centre d'un carré) et comme C est milieu de $[MF]$ (définition de la symétrie centrale) on a $AC = 2 \times MC = MF$. Et, comme $MD = \frac{BD}{2}$, on obtient $Aire(MDHF) = Aire(ABCD)$.

(c) $MDGE \subsetneq MDHF$ induit que $Aire(MDGE) < Aire(MDHF)$, puis que $Aire(BDE) < Aire(ABCD)$.

3. $AB = c$.

(a) L'utilisation du théorème de Pythagore dans différents triangles donne de manière rapide
- $BD = \sqrt{2} \times c$;
- $ME = \frac{\sqrt{6}}{2} \times c$.

Ainsi, $Aire(BDE) = \frac{BD \times ME}{2} = \frac{\sqrt{2} \times c \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times c^2$.

(b) On a

$$Aire(ABCD) = c^2 > \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{<1} \times c^2 = Aire(BDE).$$

4. On prend $P = F$ et on a $Aire(BDF) = \frac{BD \times MF}{2}$.

En effet, M est milieu de $[BD]$ (propriété du centre d'un carré), puis M est pied de la hauteur issue de F dans le triangle BDF isacèle en F (la médiane est hauteur).

Ensuite, $Aire(BDF) = \frac{BD \times MF}{2} = MD \times MF = Aire(MDHF) = Aire(ABCD)$.

Exercice 3

1. En utilisant le critère de divisibilité par 4 (cité en amont du problème, mais qui sera démontré ultérieurement), 52 étant divisible par 4 ($52 = 4 \times 13$), le nombre 123 412 893 135 552 l'est aussi.

Question. A-t-on le droit d'utiliser un critère non encore prouvé ? Mais le choix du nombre 123 412 893 135 552 tend à montrer que les auteurs du sujet attendent plutôt ce type de réponse qu'une division euclidienne par 4.

2. (a) La division euclidienne de n par 100 induit directement l'existence de deux entiers naturels q et r tels que $n = 100 \times q + r$ avec $0 \leq r < 100$.

Dans le cas particulier de la division par 100, les q et r ont des significations en relation avec notre principe de numération : q est le nombre de centaines de n et r est le nombre composé des deux derniers chiffres de n.

(b) Si r est divisible par 4, alors, on peut trouver un entier naturel k tel que $r = 4 \times k$. Puis, comme $n = 100 \times q + r$, on obtient $n = 4 \times (25 \times q + k)$ et n est divisible par 4.

(c) Si n est divisible par 4, alors, on peut trouver un entier naturel k' tel que $n = 4 \times k'$. Puis, comme $n = 100 \times q + r$, on obtient $r = 4 \times (k' - 25 \times q)$ et r est divisible par 4.

(d) Tout est montré ! Si n est un nombre entier naturel ayant au moins deux chiffres, n est divisible par 4 si et seulement si le nombre composé de ses deux derniers chiffres (i.e. le reste dans la division euclidienne de n par 100) est divisible par 4.

3. (a) Par extension ... Si n est un nombre entier naturel ayant au moins trois chiffres, n est divisible par 8 si et seulement si le nombre composé de ses trois derniers chiffres (i.e. le reste dans la division euclidienne de n par 1000) est divisible par 8.

   La démonstration est analogue à celle du point 2.

   (b) 552 étant divisible par 8 ($552 = 8 \times 69$), le nombre 123 412 893 135 552 l'est aussi.

4. (a) En généralisant encore ... Si n est un nombre entier naturel ayant au moins p chiffres, n est divisible par 2^p si et seulement si le nombre composé de ses p derniers chiffres (i.e. le reste dans la division euclidienne de n par 10^p) est divisible par 2^p.

   La démonstration est analogue à celle du point 2.

   Pour information.

   La division euclidienne de n par 10^p induit directement l'existence de deux entiers naturels q et r tels que $n = 10^p \times q + r$ avec $0 \leq r < 10^p$.

   Dans le cas particulier de la division par 10^p, les q et r ont des significations en relation avec notre principe de numération : q est le nombre de 10^p de n et r est le nombre composé des p derniers chiffres de n.

   Si r est divisible par 2^p, alors, on peut trouver un entier naturel k tel que $r = 2^p \times k$. Puis, comme $n = 10^p \times q + r$, on obtient $n = 2^p \times (5^p \times q + k)$ et n est divisible par 2^p.

   Si n est divisible par 2^p, alors, on peut trouver un entier naturel k' tel que $n = 2^p \times k'$. Puis, comme $n = 10^p \times q + r$, on obtient $r = 2^p \times (k' - 5^p \times q)$ et r est divisible par 4.

   (b)
   - 5 552 étant divisible par 16 ($5\,552 = 16 \times 347$), le nombre 123 412 893 135 552 l'est aussi.
   - 35 552 étant divisible par 32 ($35\,552 = 32 \times 1\,111$), le nombre 123 412 893 135 552 l'est aussi.
   - 135 552 étant divisible par 64 ($135\,552 = 64 \times 2\,118$), le nombre 123 412 893 135 552 l'est aussi.
   - 3 135 552 n'étant pas divisible par 128 ($3\,135\,552 = 128 \times 24\,496 + 64$), le nombre 123 412 893 135 552 ne l'est pas non plus.

   La plus grande puissance de 2 qui divise le nombre 123 412 893 135 552 est donc $64 = 2^6$.